Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XII,** 3.

EINE BEMERKUNG ZUM BEWEISE EINES SATZES ÜBER FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN

VON

R. LÜNEBURG

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: LEVIN & MUNKSGAARD
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S
1932

Einer der Hauptsätze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen besagt, dass zwischen den Fourierkoeffizienten $a_\nu = M\{f(x)\, e^{-i\lambda_\nu x}\}$ einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ und dem Mittelwert $M\{|f|^2\}$ die »Parsevalsche Gleichung«

$$(1) \qquad \Sigma |a_\nu|^2 = M\{|f|^2\}$$

besteht.

Für diesen zuerst von H. Bohr bewiesenen Satz sind verschiedene Beweise angegeben worden, deren Hauptgedanken im folgenden zunächst kurz skizziert seien.

Nach H. Bohr[1] wird die fastperiodische Funktion $f(x)$ durch eine rein periodische Funktion $F(x)$ ersetzt, die im Intervall $-T \leqq x < T$ mit $f(x)$ übereinstimmt und ausserhalb dieses Intervalls periodisch mit der Periode $2\,T$ verläuft. Für $F(x)$ gilt die Parsevalsche Gleichung; durch den Grenzübergang $T \to \infty$ folgt ihre Gültigkeit auch für $f(x)$.

Derselbe Gedanke, den Satz unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für reinperiodische Funktionen auf allgemeine fastperiodische Funktionen zu übertragen, liegt dem späteren Beweise von De la Vallée Poussin[2] zu Grunde. Das Ziel dieses Beweises ist allerdings nicht die Parsevalsche Gleichung sondern der Eindeutigkeitssatz in

[1] H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Acta Math. 45 (1925).

[2] Annales de la Soc. Sci de Bruxelles A 47, 141 (1927).

der Form: Eine fastperiodische Funktion $f(x)$ verschwindet identisch, wenn ihre Fouriersche Reihe leer ist. Man erkennt jedoch leicht, dass die Parsevalsche Gleichung eine unmittelbare Folge des Eindeutigkeitssatzes ist und umgekehrt.

Ein anderer Grenzübergang wird von N. WIENER[1] zum Beweise benutzt: $F(x)$ sei eine Funktion, die im Intervall $-T < x < T$ mit $f(x)$ übereinstimmt und sonst identisch verschwindet. Die Parsevalsche Gleichung ergibt sich jetzt im Limes $T \to \infty$ auf Grund einiger von WIENER bewiesener allgemeiner Sätze über Fouriersche Integrale.

Der Beweis von H. WEYL[2] beruht auf der Bemerkung, dass die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ die Eigenwerte γ der Funktionalgleichung

$$\gamma\,\varphi(x) = \underset{t}{M}\{f(x-t)\,\varphi(t)\}$$

sind. Durch Uebertragung der Methode der iterierten Kerne wird nachgewiesen, dass eine abzählbare Folge von Eigenwerten existiert und dann auf Grund gruppentheoretischer Sätze geschlossen, dass die zugehörigen Eigenfunktionen Exponentialpolynome sind. Daraus folgt die Parsevalsche Gleichung.

Dieser Beweis wurde sodann von HAMMERSTEIN[3] insofern modifiziert, als mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung unter der Voraussetzung $f(x) \neq 0$ zunächst die Existenz eines Eigenwertes Γ und einer zugehörigen fastperiodischen Eigenfunktion $G(x)$ gezeigt wird.

[1] N. WIENER, On the representation of functions by trigonometrical integrals. Math. Zeitschr. 24 (1926).

[2] H. WEYL, Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen. Math. Ann. 97 (1927).

[3] A. HAMMERSTEIN, Über die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. Sitzungsber. preuss. Akad. 1928.

Diese Eigenfunktion wird wie bei Weyl als Exponentialpolynom gekennzeichnet, woraus sich der Eindeutigkeitssatz in der Form ergibt: Wenn $f(x)$ nicht identisch verschwindet, so ist die Fouriersche Reihe von $f(x)$ nicht leer.

Ich möchte hier, einer Anregung von Herrn H. Bohr folgend, zeigen, wie sich die Tatsache, dass $G(x)$ ein Exponentialpolynom sein muss, auch ohne Benutzung von Sätzen aus der Gruppentheorie erkennen lässt.

Mit $G(x)$ ist die Funktion $G(x+s)$ bei beliebigem s eine fastperiodische Lösung der Gleichung

$$\Gamma G(x) = \underset{t}{M}\left\{ f(x-t)\, G(t) \right\} \tag{2}$$

und daher, falls $p(s)$ eine beliebige im Intervall $-1 \leqq s \leqq 1$ stetige Funktion ist, wegen der in x gleichmässigen Existenz des Mittelwertes, auch die Funktion

$$P(x) = \int_{-1}^{1} G(x+s)\, p(s)\, ds.$$

Nehmen wir an, dass $p(s)$ eine stetige Ableitung besitzt und $p(-1) = p(1) = 0$ gilt, so folgt wegen

$$P(x) = \int_{x-1}^{x+1} G(s)\, p(s-x)\, ds,$$

dass $P(x)$ für alle x stetig differenzierbar ist und zwar gilt

$$P'(x) = -\int_{-1}^{1} G(x+s)\, p'(s)\, ds.$$

Allgemein ist $P(x)$ n mal stetig differenzierbar, falls dies für $p(s)$ im Intervall $-1 \leqq s \leqq +1$ zutrifft und ausserdem $p(s)$ und die $n-1$ ersten Ableitungen $p'(s), \ldots, p^{(n-1)}(s)$ in den Punkten -1 und $+1$ verschwinden.

Nun sind aber mit $P(x)$ auch die Ableitungen $P^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ wegen der Integraldarstellung der Ableitungen zu Γ gehörige fastperiodische Eigenfunktionen der Gleichung (2). Ist daher m die (endliche) Anzahl der voneinander linear unabhängigen Eigenfunktionen und wählen wir $n \geqq m$, so muss zwischen den Funktionen $P^{(\nu)}(x)$ eine Relation

$$a_0 P(x) + a_1 P'(x) + \cdots + a_n P^{(n)}(x) = 0$$

bestehen, wobei die a_ν Konstante sind. Beschränkte Lösungen dieser Differentialgleichung sind notwendig Exponentialpolynome mit rein imaginären Exponenten; also folgt

$$P(x) = \sum_\nu b_\nu e^{i\lambda_\nu x}.$$

Hier können nicht alle b_ν verschwinden, falls nicht $P(x)$ identisch verschwindet. Dies können wir durch geeignete Wahl von $p(s)$ aber stets ausschliessen. Denn ist im Intervall $x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta$; $0 < \delta < 1$ etwa

$$\Re\, G(x) \geqq \alpha > 0$$

(ein derartiges Intervall muss wegen $G(x) \mp 0$ für $G(x)$ oder $-G(x)$ existieren), so setzen wir z. B.

$$p(s) = \begin{cases} \dfrac{(\delta - s)^{n+1}(\delta + s)^{n+1}}{\int_{-\delta}^{\delta}(\delta - s)^{n+1}(\delta + s)^{n+1}\, ds}, & \text{für } |s| \leqq \delta \\ 0, & \text{für } |s| > \delta \end{cases}$$

und erhalten

$$\Re\, P(x_0) = \int_{-\delta}^{\delta} \Re\, G(x_0 + s)\, p(s)\, ds \geqq \alpha \int_{-\delta}^{\delta} p(s)\, ds = \alpha > 0.$$

Dass die Fouriersche Reihe von $f(x)$ nicht leer sein kann, erkennen wir nunmehr sofort, indem wir

$$P(x) = \sum_{\nu} b_{\nu} e^{i\lambda_{\nu} x}$$

in (2) eintragen. Es folgt

$$\sum_{\nu} b_{\nu} \left[\Gamma - \underset{t}{M} \left\{ f(t) e^{-i\lambda_{\nu} t} \right\} \right] e^{i\lambda_{\nu} x} = 0,$$

also wegen der linearen Unabhängigkeit der Exponentialfunktionen:

$$\Gamma = \underset{t}{M} \left\{ f(t) e^{-i\lambda_{\nu} t} \right\}.$$

Færdig fra Trykkeriet d. 27. August 1932.